মহাকর্ষ ও অভিকর্ষ

Lecture-1

মহাকর্ষ সূত্র

CPS

Case-1:

$F \propto m_1 m_2$ [r ধ্রুবক]

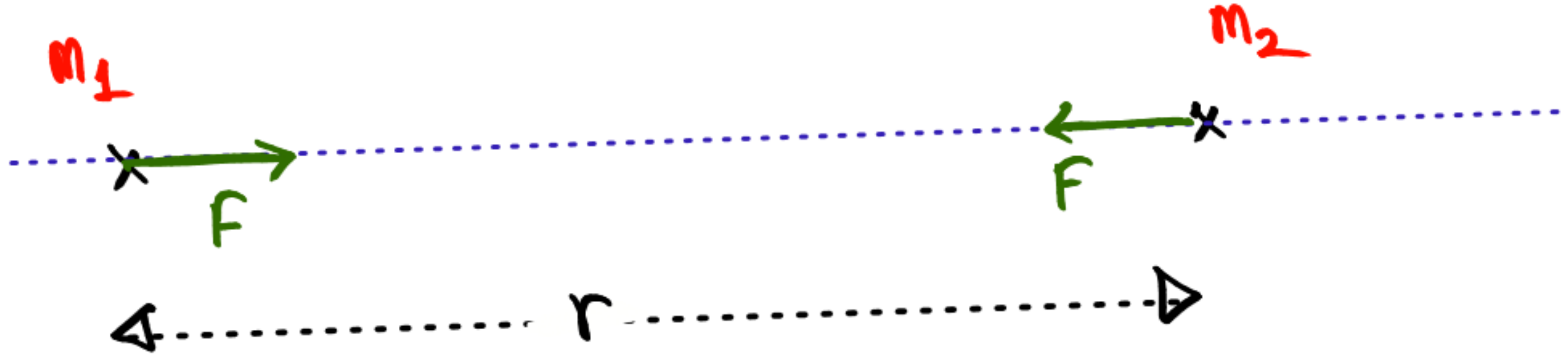
→ বিন্দু ভরের জন্য

m_1 x .... r .... x m_2

$F \propto m_1 m_2$

m_1' x .... r .... x m_2'

$F \propto m_1' m_2'$



$F \propto \frac{m_1 m_2}{r^2}$

$\Rightarrow F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}$

$\rightarrow G = \frac{F r^2}{m_1 m_2}$

Case-2:

$F \propto \frac{1}{r^2}$ [m_1, m_2 ধ্রুবক]

m_1 x .... r_1 .... x m_2

$F \propto \frac{1}{r_1^2}$

m_1 x .... r_2 .... x m_2

$F \propto \frac{1}{r_2^2}$

$$G = \frac{Fr^2}{m_1 m_2}$$

একক: $\frac{Nm^2}{Kg^2}$

$Nm^2 Kg^{-2}$

মাত্রা: $\frac{MLT^{-2} \times L^2}{M^2}$

$$[G] = [M^{-1} L^3 T^{-2}]$$

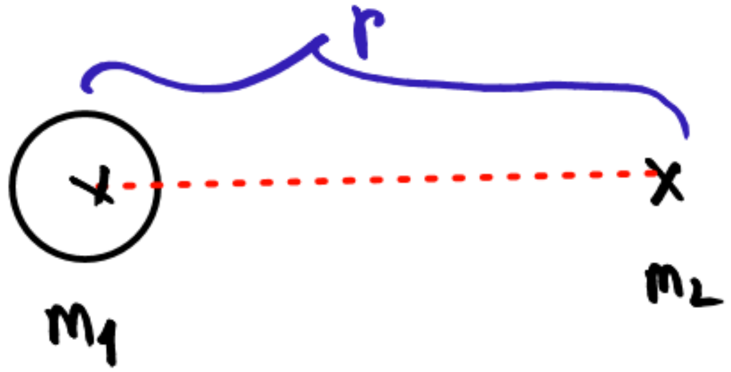
মহাকর্ষ সূত্র Application Cases

CPS

①

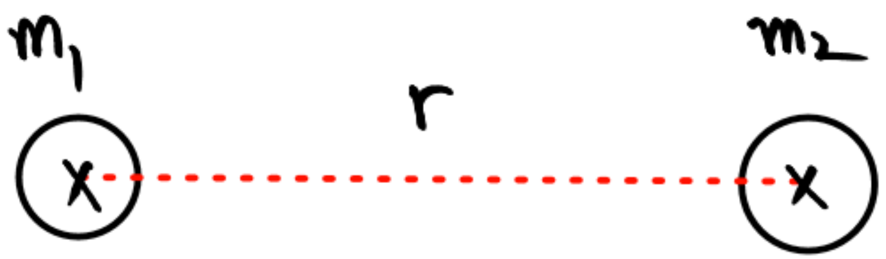
$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

②



$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

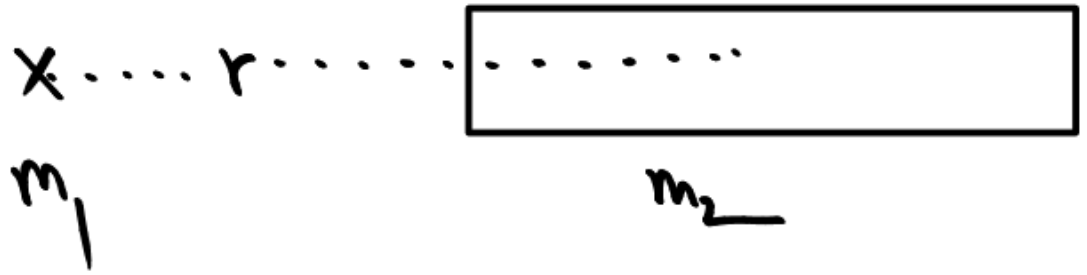
③



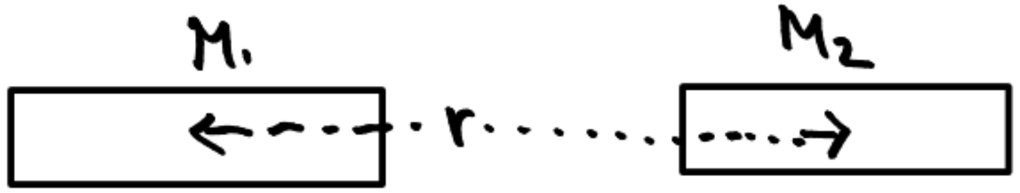
$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

④

$$F \neq G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$



⑤



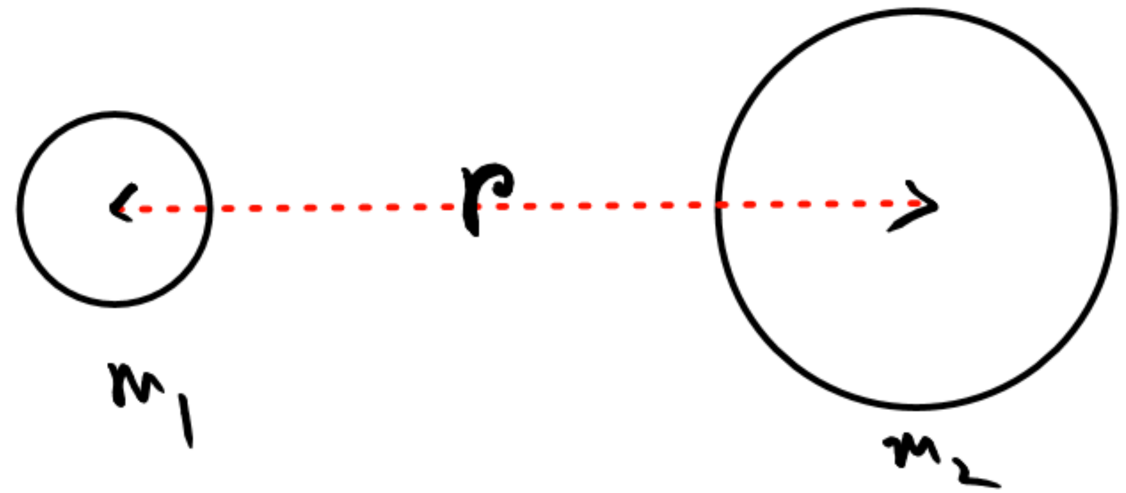
$$F \neq G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

5 mm ব্যাসার্ধের একটি সোনার গোলক এবং 11.5 cm ব্যাসার্ধের একটি সিসার গোলকের কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব 15 cm হলে তাদের মধ্যে মহাকর্ষ বলের মান 2.16×10^{-9} N। এই তথ্য থেকে মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মান নির্ণয় করো। দেওয়া আছে সোনা ও সিসার ঘনত্ব যথাক্রমে 19.3×10^{3} kgm^{-3} এবং 11.3×10^{3} kgm^{-3}

$$F = \frac{G m_1 m_2}{r^2}$$

$$\Rightarrow G = \frac{F r^2}{m_1 m_2} = \frac{2.16\times10^{-9}\times(0.15)^2}{0.01\times71.99}$$

$$= 6.75\times10^{-11}\ Nm^2kg^{-2}$$



Ⓐ

$$m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 \times \frac{4}{3}\pi r_1^3$$

$$\Rightarrow 0.01\ kg = 19.3\times10^3\times\frac{4}{3}\pi\times(5\times10^{-3})^3$$

$$m_2 = \rho_2 V_2 = 11.3\times10^3\times\frac{4}{3}\pi(11.5\times10^{-2})^3$$

$$= 71.99\ kg$$

The mass of planet Jupiter is 1.9×10^{27} kg and that of the Sun is 1.99×10^{30} kg. The mean distance of Jupiter from the Sun is 7.8×10^{11} m. Calculate the gravitational force which Sun exerts on Jupiter. Assuming that Jupiter moves in circular orbit around the Sun, also calculate the speed of Jupiter. $G = 6.67\times10^{-11}\,\text{Nm}^2\,\text{kg}^{-2}$.

$$F_G = G\frac{Mm}{r^2}$$

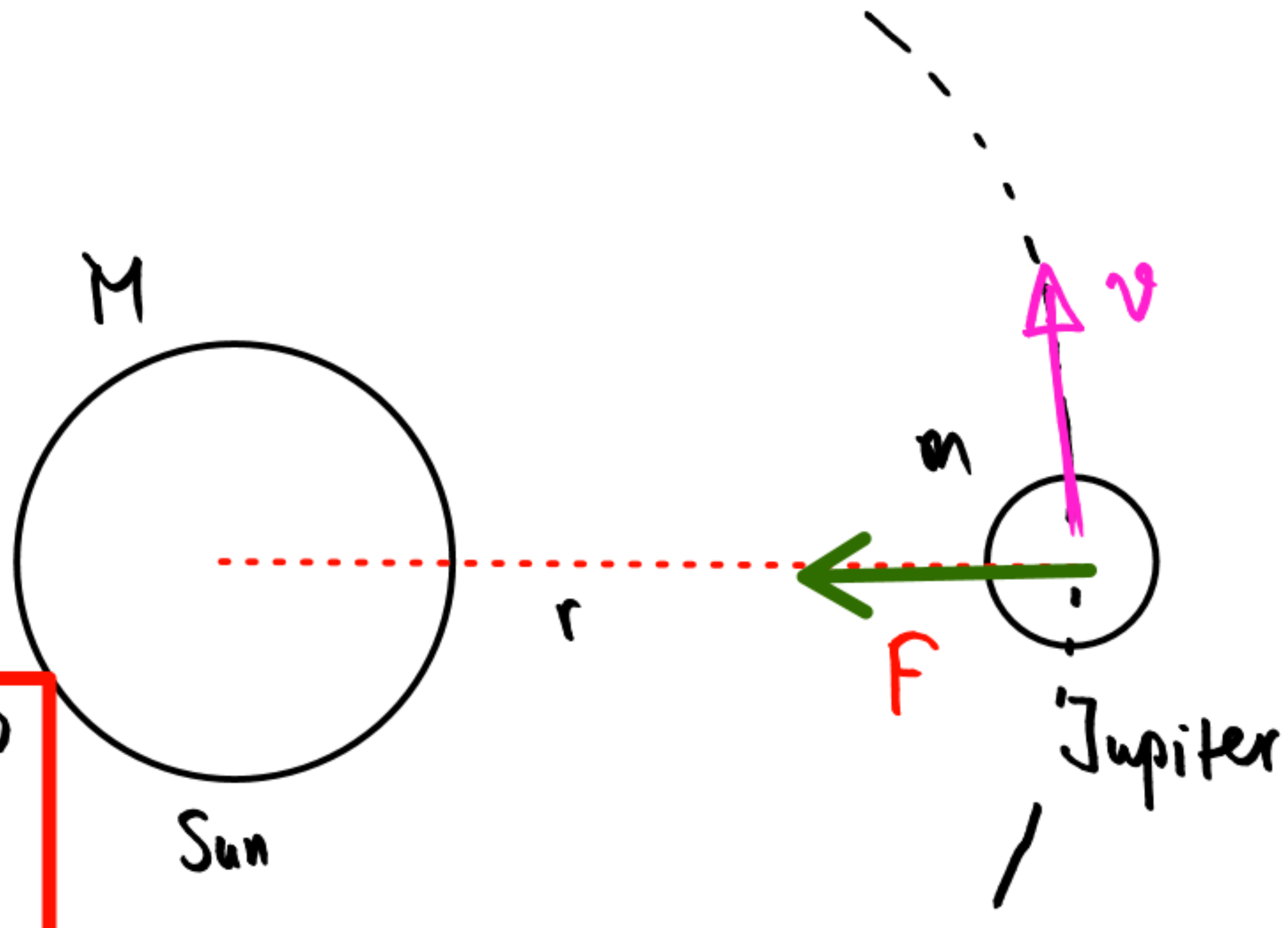
$$= \frac{6.67\times10^{-11}\times1.99\times10^{30}\times1.9\times10^{27}}{(7.8\times10^{11})^2}$$

$$= 4.145\times10^{23}\,N$$

$$F_{net} = F_G = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow 4.145\times10^{23} = \frac{1.9\times10^{27}\times v^2}{7.8\times10^{11}}$$

$$\Rightarrow v = 13.04\times10^3\ \text{m/s}$$



মহাকর্ষ সূত্র

সমবাহু ত্রিভুজ। যেকোন একটি বিন্দুর উপর অর্পিত মহাকর্ষ বল কত?

$$F = G\frac{mm}{a^2} = \frac{Gm^2}{a^2}$$

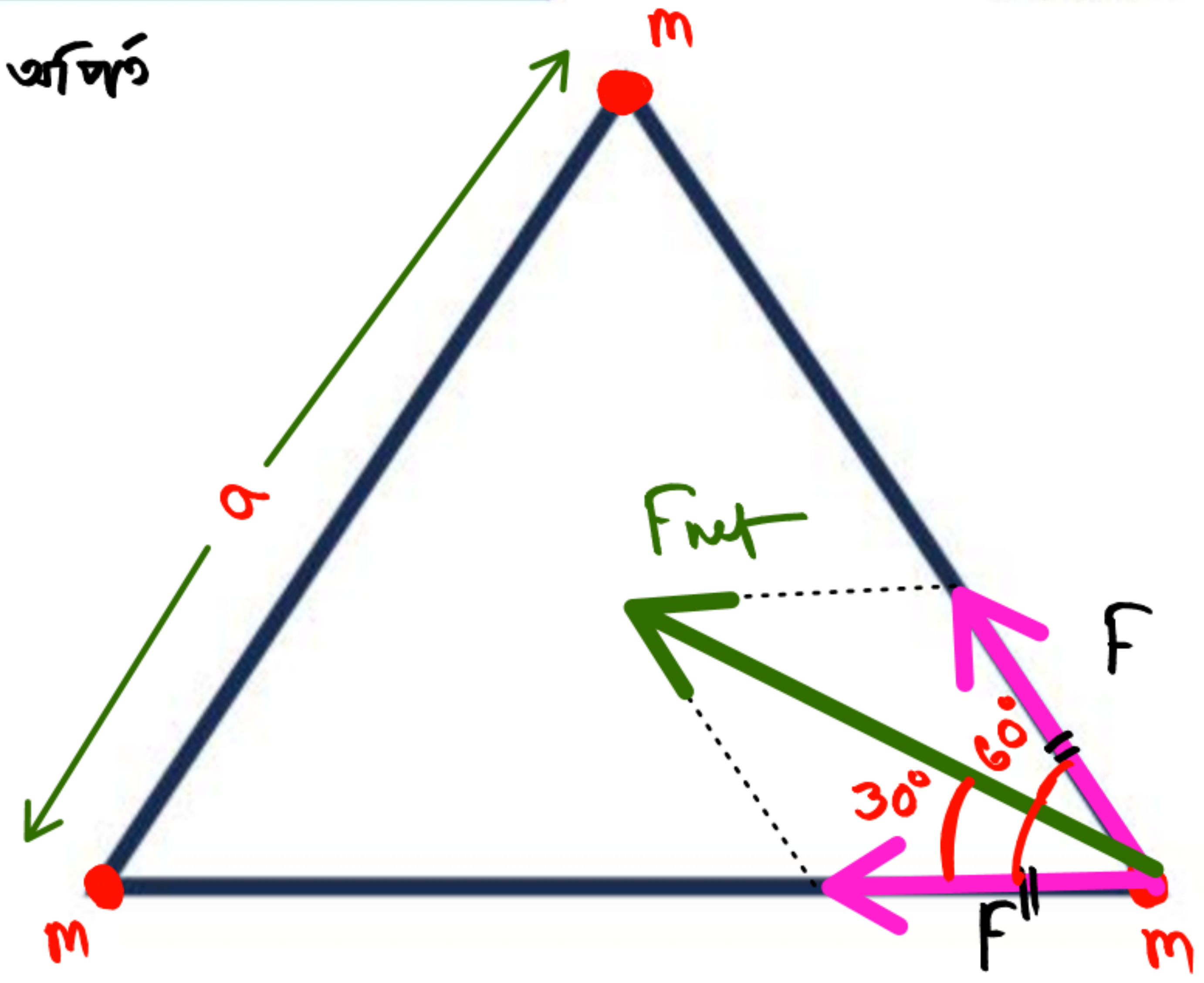
$$F_{net} = \sqrt{F^2 + F^2 + 2FF\cos 60^\circ}$$

$$= \sqrt{2F^2 + 2F^2\cos 60^\circ}$$

$$= \sqrt{2F^2(1+\cos 60^\circ)}$$

$$= \sqrt{2}\,F\sqrt{1+\cos 60}$$

$$= \sqrt{2} \times \frac{Gm^2}{a^2}\sqrt{1+\frac{1}{2}}$$



মহাকর্ষ সূত্র

(MCQ)

একই ভরবিশিষ্ট (m) দুটি কণা পারস্পরিক অভিকর্ষীয় আকর্ষণ বলের প্রভাবে r ব্যাসার্ধের বৃত্তপথে পরিভ্রমণ করছে। প্রতিটি কণার দ্রুতি কত?

$$F_G = F_c$$

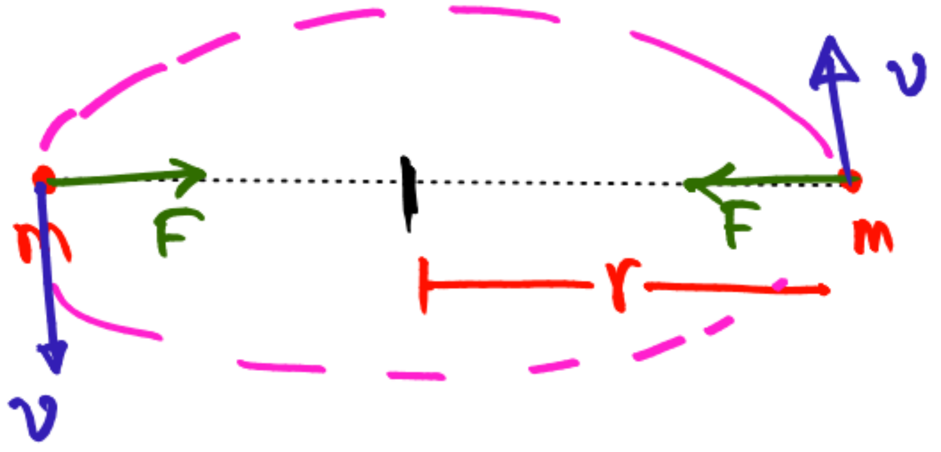
$$\Rightarrow G\frac{mm}{(2r)^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow G\frac{m^2}{4r^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow v^2 = \frac{Gm}{4r}$$

$$\Rightarrow v = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{Gm}{r}}$$

Ⓐ



মহাকর্ষ সূত্র

সমভরের তিনটি বস্তুকণাকে একটি সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুতে রাখা আছে। প্রত্যেকটি বস্তুকণার ভর m এবং ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য a। কণাগুলির পারস্পরিক মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বলের প্রভাবে সমবাহু ত্রিভুজের পরিবৃত্ত (circumcircle) বরাবর প্রদক্ষিণ করলে প্রতিটি বস্তুকণার বেগ নির্ণয় করো।

$$F_{net} = F_c$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}\,F = F_c$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \times \frac{Gm^2}{a^2} = \frac{mv^2}{r}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \times \frac{Gm^2}{a^2} = \frac{mv^2\sqrt{3}}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{Gm}{a} = v^2$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{Gm}{a}} \quad \text{(A)}$$

$$F_{net} = \sqrt{F^2 + F^2 + 2F \cdot F \cdot \cos 60^\circ}$$

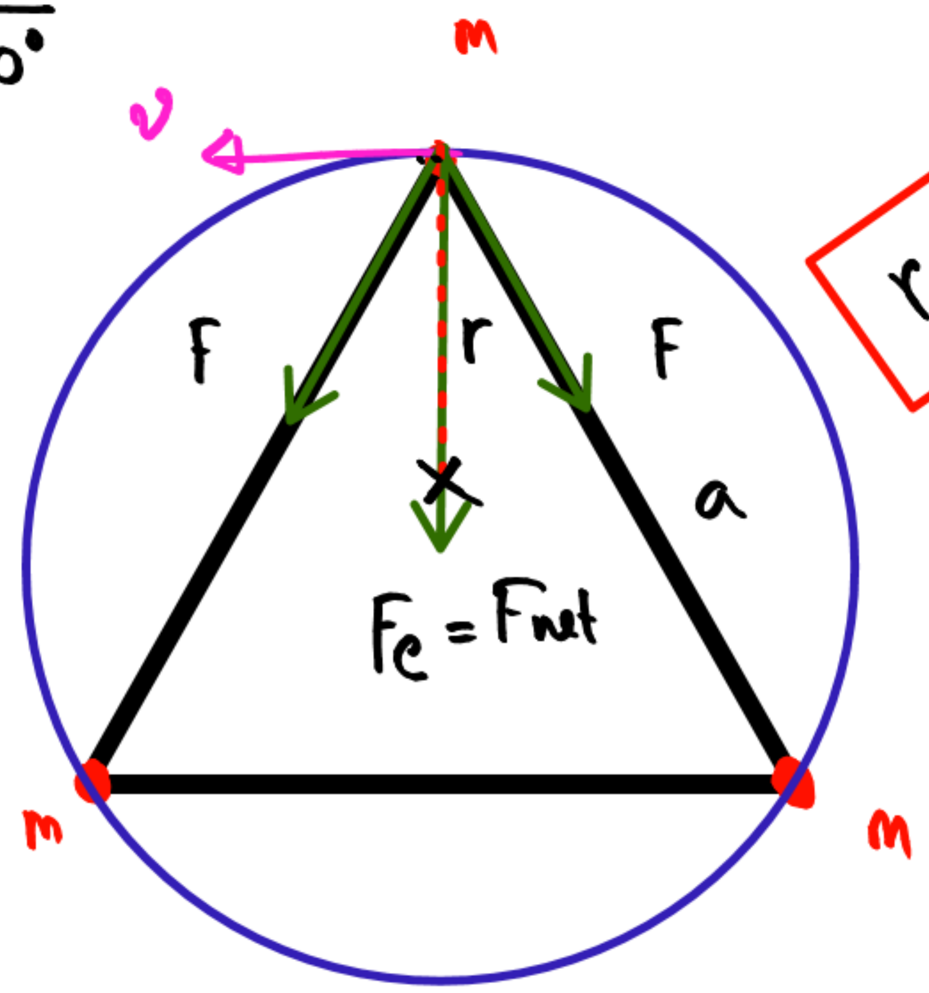
$$= \sqrt{2F^2(1 + \cos 60^\circ)}$$

$$= \sqrt{2F^2 \times \frac{3}{2}}$$

$$= \sqrt{3F^2}$$

$$F_{net} = \sqrt{3}\,F$$

$$F = G\frac{m^2}{a^2}$$



$$r = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

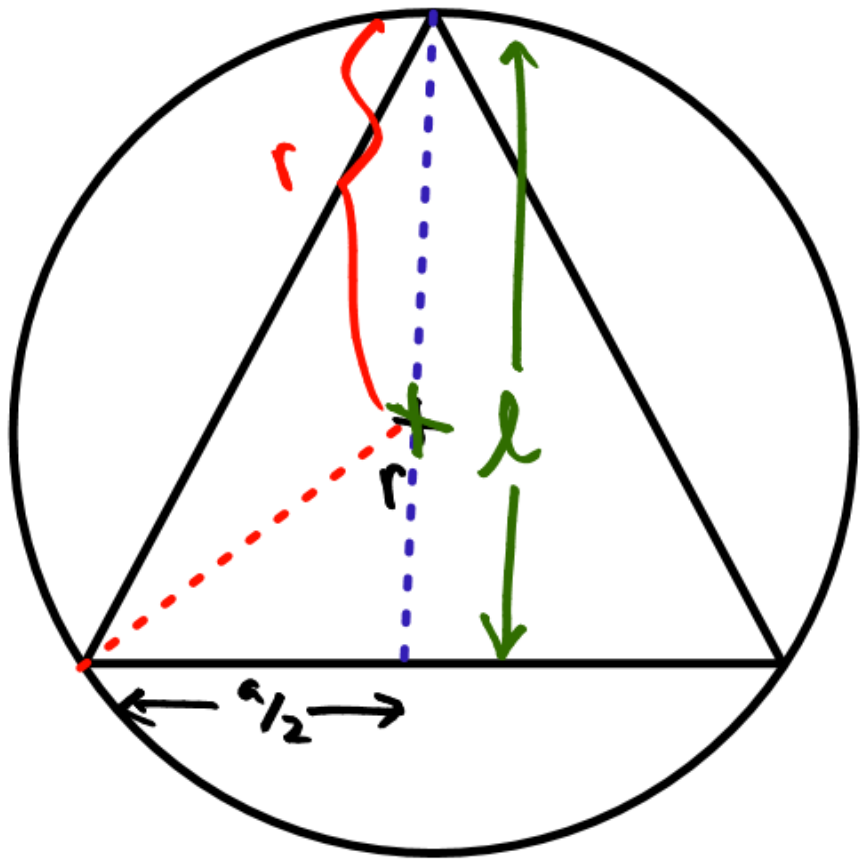
$$r = \frac{2}{3} l$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \sqrt{\frac{3a^2}{4}}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}a}{2}$$

$$r = \frac{a}{\sqrt{3}}$$



মহাকর্ষ সূত্র

CPS

m ভরসম্পন্ন চারটি কণা একটি বর্গক্ষেত্রের চারটি কৌণিক বিন্দুতে আছে। কণাগুলি পরস্পর মহাকর্ষীয় আকর্ষণের প্রভাবে R ব্যাসার্ধের বৃত্তের পরিধি বরাবর ঘোরে। প্রতিটি কণার গতিবেগ নির্ণয় করো।

H.W.

মহাকর্ষ সূত্র

50 kg ও 10 kg ভরবিশিষ্ট দুটি গোলকের কেন্দ্র দুটির মধ্যবর্তী দূরত্ব 30cm। ওদের পারস্পরিক আকর্ষণ বল $\frac{1}{28}mg$ ভরবিশিষ্ট বস্তুর ওজনের সমান। এ থেকে মহাকর্ষীয় ধ্রুবকের মান নির্ণয় করো।

$$\frac{Gm_1m_2}{r^2} = F_g = mg = \frac{1}{28} \times 10^{-3} \times 10^{-3} \times 9.8$$

H.W.

মহাকর্ষ সূত্র

M ভরের একটি বস্তুকে দুটি খণ্ডে ভাগ করা হল-একটির ভর m। খন্ড দুটিকে একটি নির্দিষ্ট দূরত্বে রাখা হল। m/M এর মান কত হলে বস্তুদ্বয়ের মহাকর্ষীয় আকর্ষণ বল সর্বাধিক হবে? তখন m/(M-m)=?

$$F = \frac{G\,m(M-m)}{r^2} = \frac{G\,(mM - m^2)}{r^2}$$

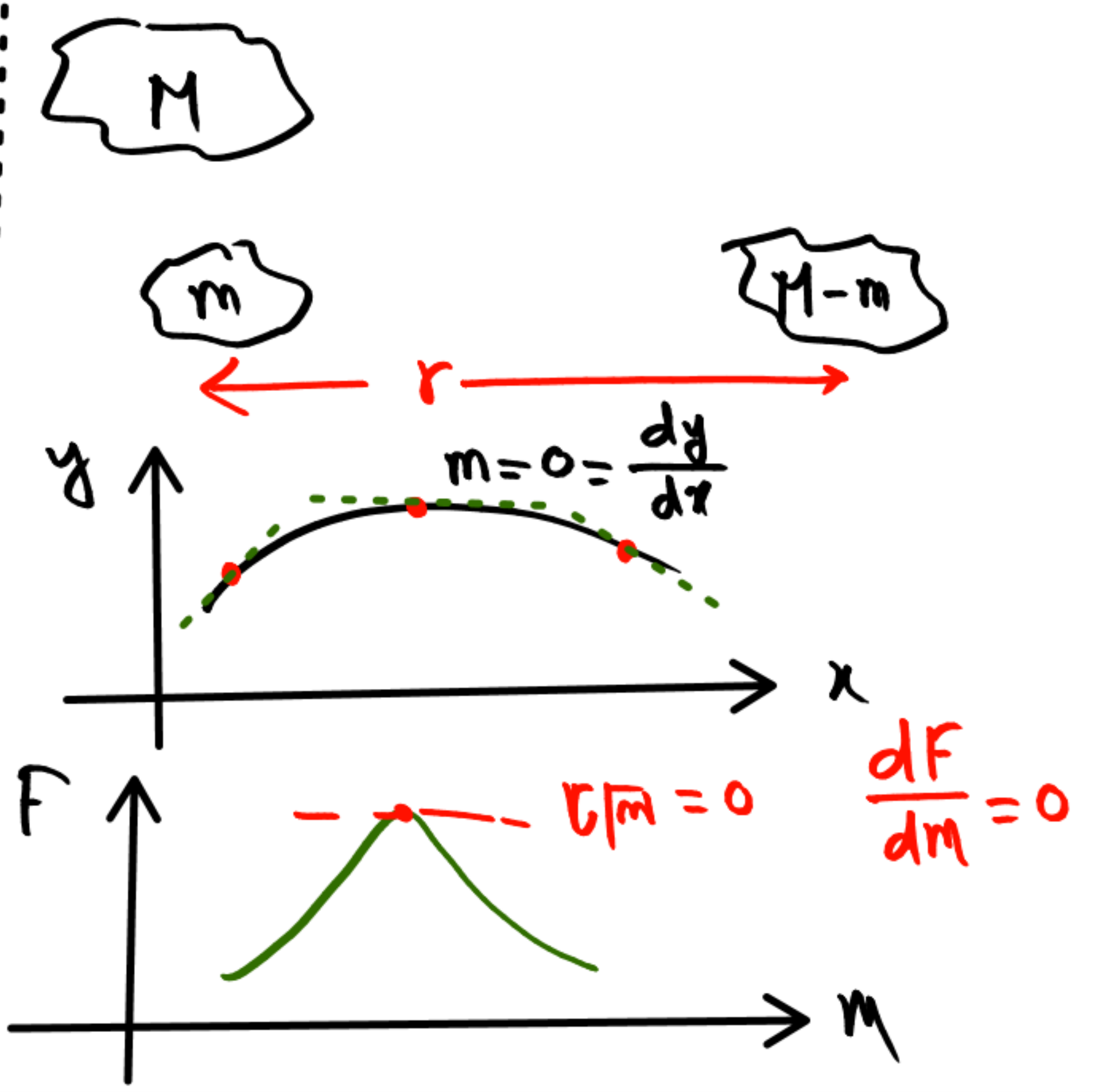
$$F = \frac{G}{r^2}(mM - m^2)$$

F সর্বাধিক হতে হলে $(mM - m^2)$ কে সর্বাধিক হতে হবে।

$$\therefore \frac{dF}{dm} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dm}(mM - m^2) = 0$$

$$\Rightarrow M - 2m = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{m}{M} = \frac{1}{2}}$$

$$\therefore \frac{m}{M-m} = \frac{m}{2m-m} = \frac{m}{m} = 1 \quad (\text{Ans})$$



মহাকর্ষ সূত্র

সূর্যের ভর বের কর। পৃথিবী হতে সূর্যের গড় দূরত্ব 1.5×10⁸ km

$v = \omega r$

$T = 365.25$ days.

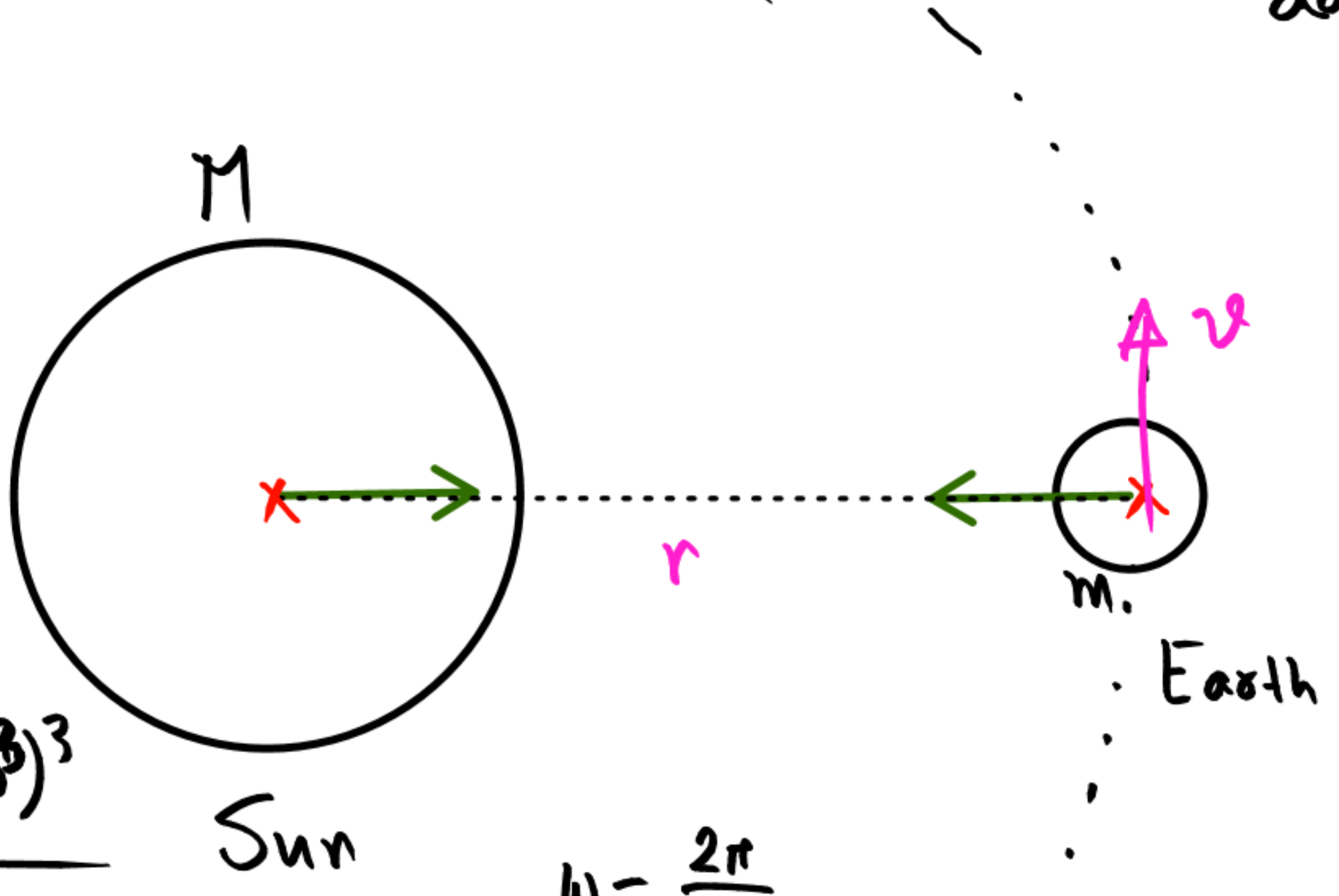
$$F_G = \frac{GMm}{r^2} = \frac{mv^2}{r} = m\omega^2 r$$

$$\Rightarrow \frac{GMm}{r^2} = m\omega^2 r$$

$$\Rightarrow \frac{GM}{r^3} = \omega^2$$

$$\Rightarrow M = \frac{\omega^2 r^3}{G} = \frac{(1.99\times10^{-7})^2 \times (1.5\times10^8\times10^3)^3}{6.673\times10^{-11}}$$

$$\boxed{M = 2\times10^{30}\ \text{kg}}$$



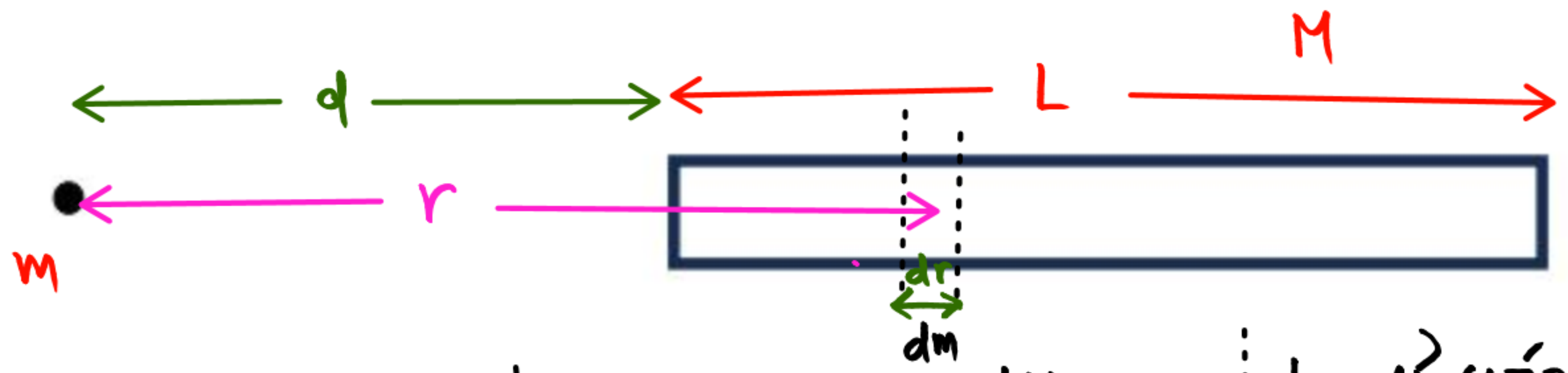
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{365.25\times24\times60\times60} = 1.99\times10^{-7}\ \text{rad/s}$$

মহাকর্ষ সূত্র

পৃথিবী থেকে সূর্যের গড় দূরত্ব $1.5\times10^8\ km$ ও চন্দ্রের গড় দূরত্ব $38400\ km$। পৃথিবীর ওপর সূর্যের আকর্ষণ চন্দ্রের আকর্ষণের 180 গুণ হলে সূর্যের ভর চন্দ্রের তুলনায় কত গুণ বেশি?

H.W.

মহাকর্ষ সূত্র Application Cases



L দৈর্ঘ্যের ভর M

$\therefore$ 1 " " $\frac{M}{L}$

$\therefore$ dr " " $\frac{M\,dr}{L} = dm$

$$dF = \frac{Gm\,dm}{r^2}$$

$$dF = \frac{Gm\,M\,dr}{r^2 L}$$

$$= \frac{GMm}{L}\frac{1}{r^2}dr$$

$$F = \int dF = \int_{d}^{d+L} \frac{GMm}{L}\frac{1}{r^2}dr$$

$$\Rightarrow F = \frac{GMm}{L}\int_{d}^{d+L} r^{-2}\,dr$$

$$\Rightarrow F = \frac{GMm}{L}\left[\frac{r^{-1}}{-1}\right]_{d}^{d+L}$$

$$\Rightarrow F = \frac{GMm}{L}\left[-\frac{1}{r}\right]_{d}^{d+L}$$

$$\Rightarrow F = \frac{GMm}{L}\left[\frac{1}{d} - \frac{1}{d+L}\right]$$

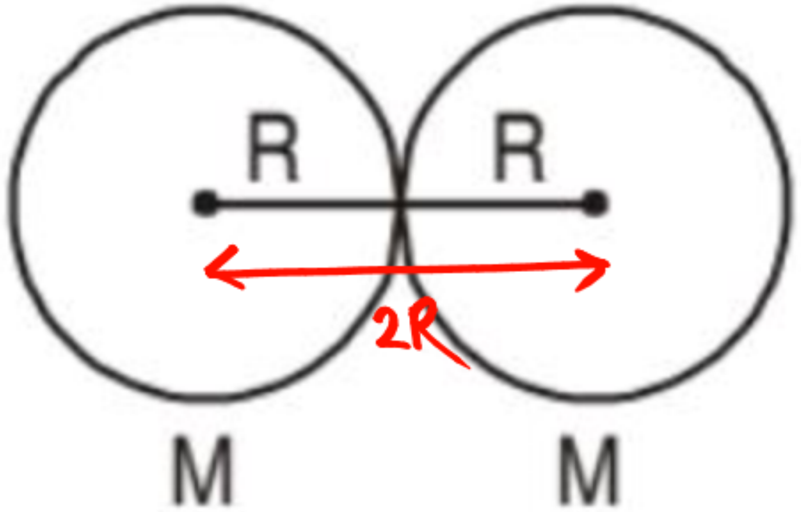
মহাকর্ষ সূত্র Application Cases

CPS

একই উপাদানের নিরেট গোলকদুইটির জন্য $F \propto R^n$ হলে, n=? ~~(A) -2~~ (B) ...... (C) ...

$$F = \frac{GMM}{(2R)^2} = \frac{GMM}{4R^2} = GM^2 \frac{1}{4} R^{-2}$$

$$\therefore \boxed{n = -2}$$ ✗



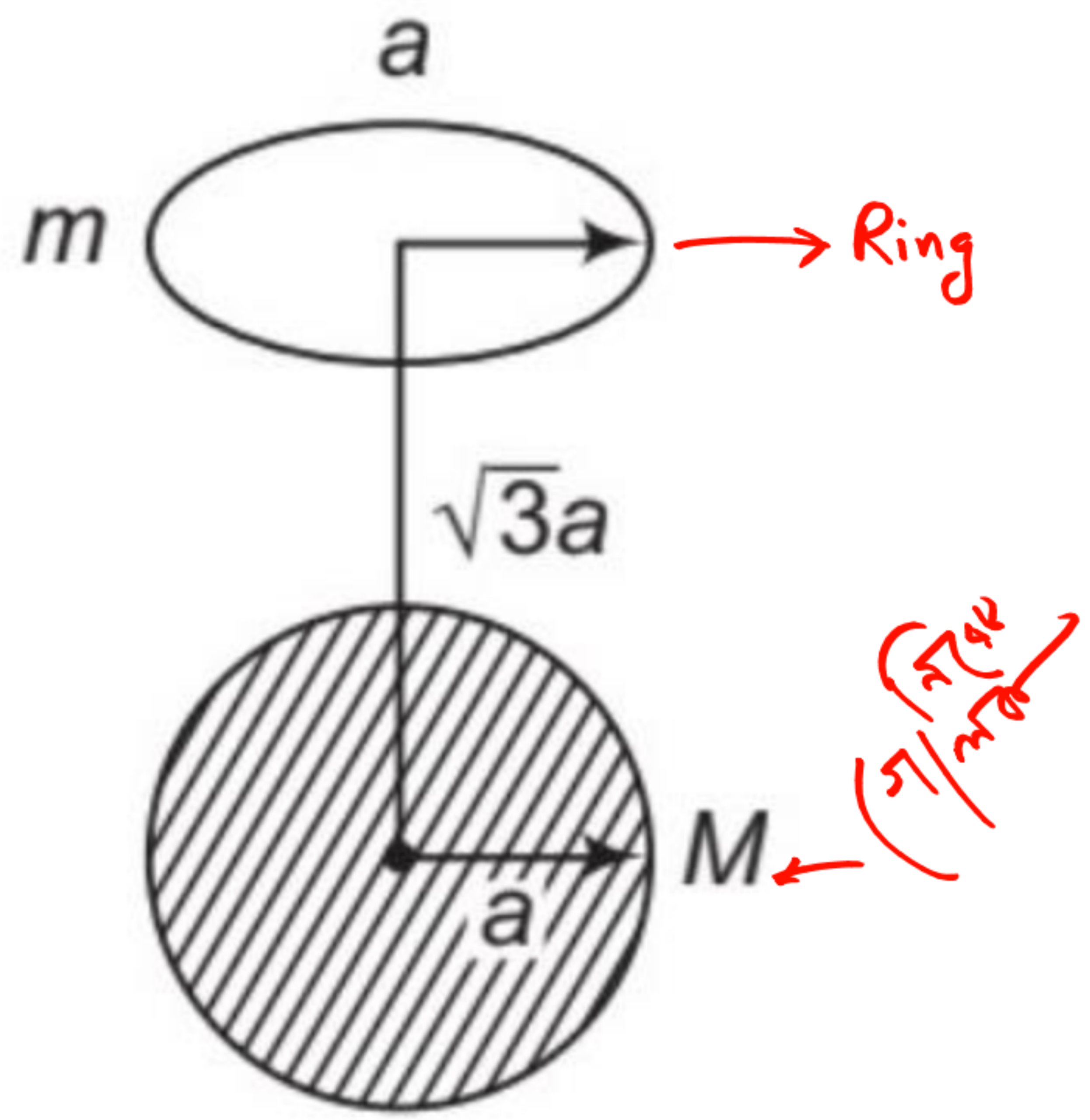
$$M = \rho V = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \rho R^3$$

$$\therefore F = G\left(\frac{4}{3}\pi \rho R^3\right)^2 \times \frac{1}{4} R^{-2}$$

$$= \underline{\qquad\qquad} \times R^6 \times R^{-2} = \underline{\qquad\qquad} \times R^4$$

$$\therefore F \propto R^4 \qquad \therefore \boxed{n = 4} \quad (A)$$

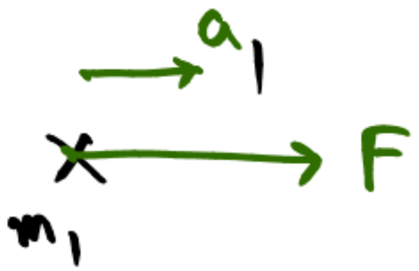
Don’t try!!



?? ← প্রাথমিক ত্বরণ → $t = 0$

CPS

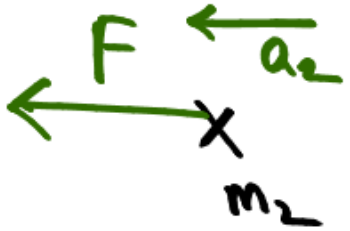
$\underline{m_1:}$



$$F = m_1 a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{\frac{Gm_1m_2}{r^2}}{m_1}$$

m_1 এর উপর নির্ভরশীল না। → $$a_1 = \frac{Gm_2}{r^2}$$

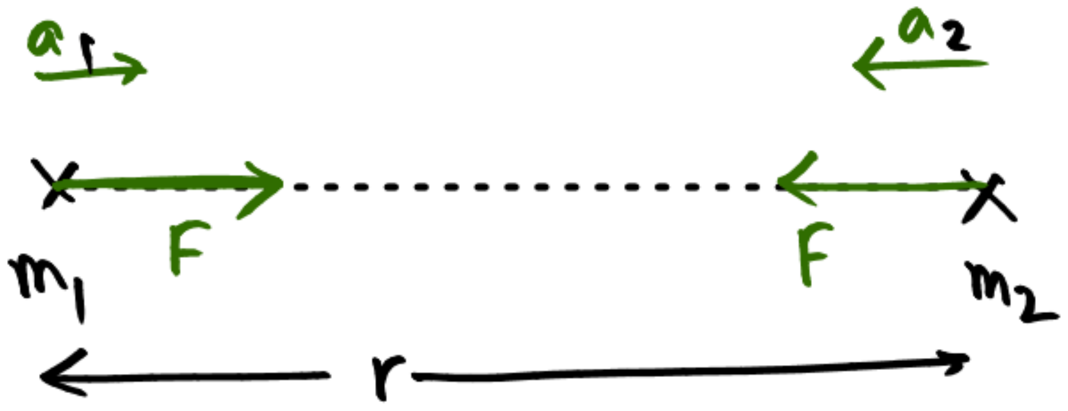
$\underline{m_2:}$



$$F = m_2 a_2$$

$$\Rightarrow a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{\frac{Gm_1m_2}{r^2}}{m_2}$$

m_2 এর উপর নির্ভরশীল না → $$a_2 = \frac{Gm_1}{r^2}$$



$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

মহাকর্ষ সূত্র

CPS

2kg এবং 5kg ভরের দুটি বস্তু পরস্পরের থেকে 40cm দূরত্বে আছে। মহাকর্ষীয় বল ছাড়া অন্য কোনো বল তাদের ওপর ক্রিয়াশীল না হলে, তাদের প্রাথমিক ত্বরণ নির্ণয় করো।

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = 6.673 \times 10^{-11} \times \frac{2 \times 5}{0.4^2}$$

$$F = 4.17 \times 10^{-9} N$$

$$a_1 = \frac{F}{m_1} = \frac{4.17 \times 10^{-9}}{2}$$

$$= 2.085 \times 10^{-9} m/s^2$$

$$a_2 = \frac{F}{m_2} = \frac{4.17 \times 10^{-9}}{5}$$

$$= 8.34 \times 10^{-10} m/s^2$$

(A)

মহাকর্ষ সূত্র

CPS

পৃথিবীর ভর, $m_e = 5.98 \times 10^{24}$ kg; চাঁদের ভর $m = 0.0123\ m_e$ এবং তাদের মধ্যে গড় দূরত্ব $d = 3.84 \times 10^5$ km হলে, (i) তারা পরস্পরকে যে মহাকর্ষীয় বলে আকর্ষণ করে এবং (ii) এই বলের ক্রিয়ায় প্রত্যেকের যে ত্বরণ সৃষ্টি হয় তা নির্ণয় করো।

H.W.

মহাকর্ষ সূত্র

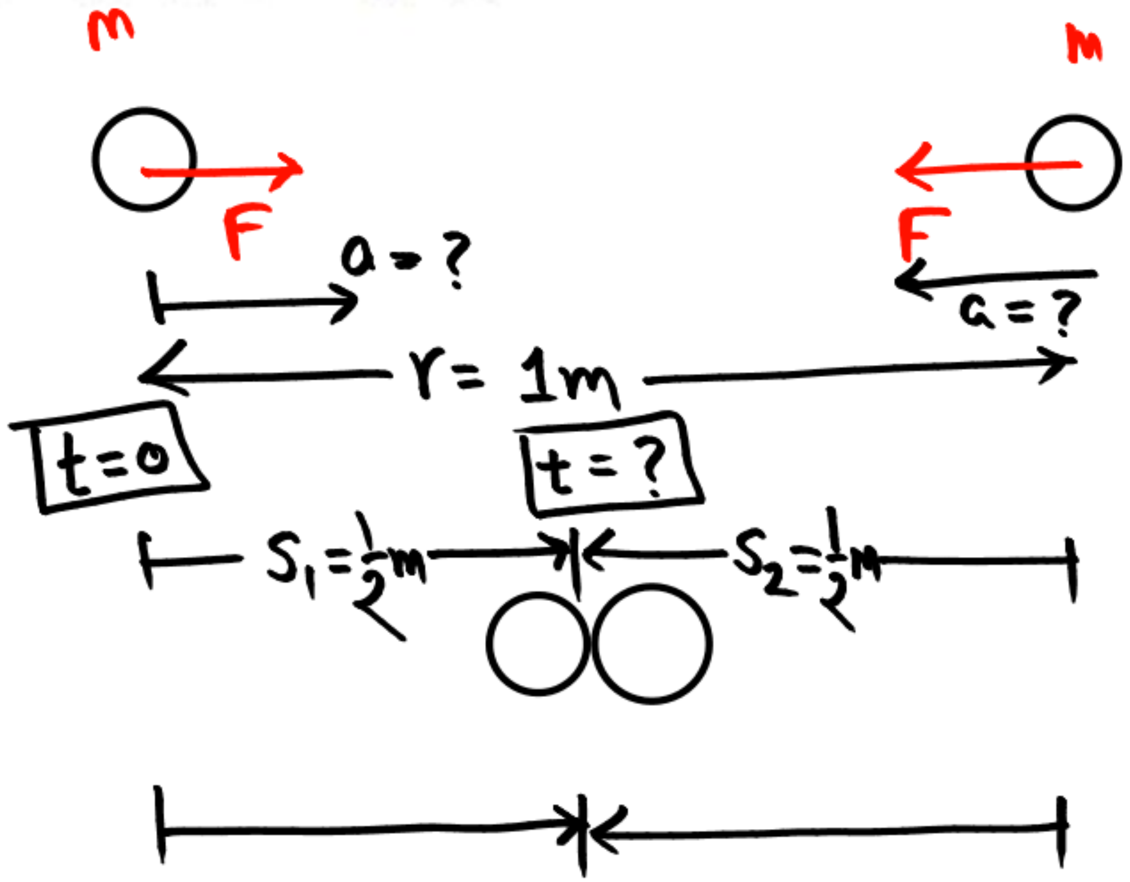
MCQ

20g ভরের দুটি ছোটো গোলক সম্পূর্ণ মসৃণ অনুভূমিক তলে পরস্পর থেকে 100 cm দূরত্বে রাখা আছে। মহাকর্ষীয় আকর্ষণে কতক্ষণ পরে ওরা পরস্পরের সঙ্গে মিলিত হবে?

$$a = \frac{F}{m} = \frac{G\frac{m^2}{r^2}}{m} = \frac{Gm}{r^2}$$

$$= \frac{6.673\times10^{-11}\times 20\times10^{-3}}{1^2}$$

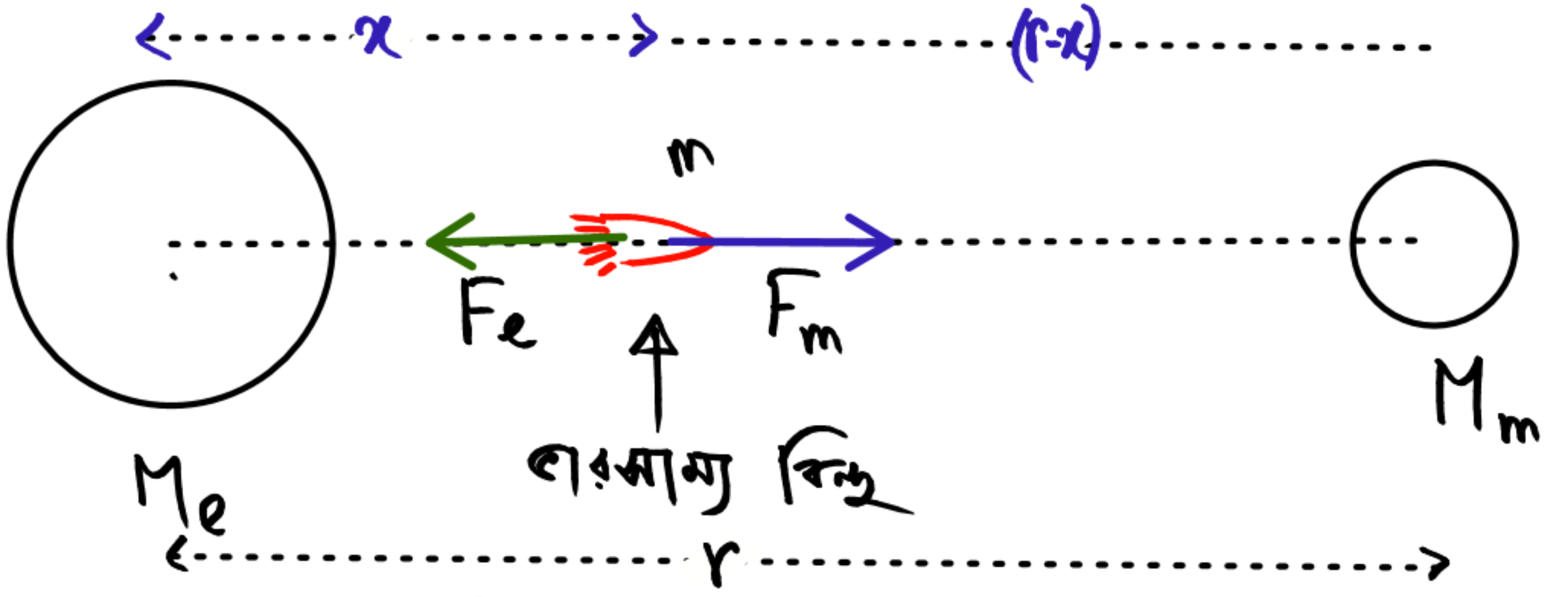
$$a = 1.33\times10^{-12}\ m/s^2$$



$$S_1 = u_1 t + \frac{1}{2}at^2 \quad (u_1 = 0)$$

$$\Rightarrow S_1 = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s}{a}} = \sqrt{\frac{2\times\frac{1}{2}}{1.33\times10^{-12}}} = 8.67\times10^{5}\,s = 10.04\ \text{days}.$$

লব্ধি বল শূন্য



লব্ধি শূন্য হলে,

$$F_e = F_m$$

$$\Rightarrow \frac{GM_e m}{x^2} = \frac{GM_m m}{(r-x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{M_e}{x^2} = \frac{M_m}{(r-x)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{(r-x)^2}{x^2} = \frac{M_m}{M_e}$$

$$\Rightarrow \frac{r-x}{x} = \sqrt{\frac{M_m}{M_e}}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{x} - 1 = \sqrt{\frac{M_m}{M_e}}$$

$$\Rightarrow \frac{r}{x} = 1 + \sqrt{\frac{M_m}{M_e}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{r}{1 + \sqrt{\frac{M_m}{M_e}}}$$

MCQ Short cut

Admission Test Written

যার হতে দূরত্ব

মহাকর্ষ সূত্র

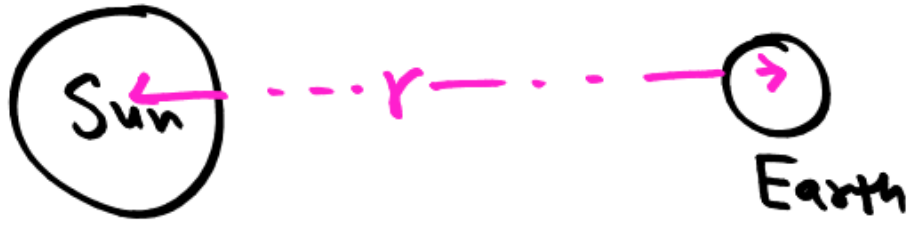
পৃথিবী থেকে সূর্যের দিকে একটি রকেট ছোড়া হল। পৃথিবীর কেন্দ্র থেকে কত দূরত্বে রকেটটির ওপর মহাকর্ষীয় লব্ধি বল শূন্য হবে? দেওয়া আছে, সূর্যের ভর = 2×1030 kg, পৃথিবীর ভর = 6×10^{24} kg। অন্যান্য গ্রহের প্রভাব উপেক্ষণীয়। (কক্ষীয় ব্যাসার্ধ = 1.5×10^{11} m) সূর্যের ভর, $M = 2 \times 10^{30}$ kg

$$x = \frac{r}{1+\sqrt{\frac{M_s}{M_e}}}$$

$$= \frac{1.5 \times 10^{11}}{1+\sqrt{\frac{2\times10^{30}}{6\times10^{24}}}}$$

$$= 2.59 \times 10^{8} m$$

(A)



মহাকর্ষ সূত্র

CPS

সূর্য থেকে পৃথিবীর দূরত্ব $1.5\times10^{8}\, km$। সূর্য ও পৃথিবীর সংযোজক সরলরেখার কোন বিন্দুতে পৃথিবীর মহাকর্ষীয় আকর্ষণ ও সূর্যের মহাকর্ষীয় আকর্ষণ পরস্পরের সমান ও বিপরীত? (সূর্যের ভর পৃথিবীর ভরের 336400 গুণ।)

H.W.